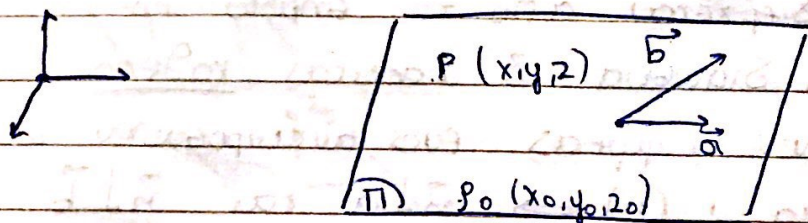


28/03/19

Καθορισμός επιπέδων



Δίνεται επίπεδο (π) το οποίο διέρχεται από το σημείο P_0 και είναι παράλληλο προς τα γραμμές διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$

Διανυσματική εξίσωση

$$\vec{OP} = \vec{OP}_0 + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$$

Παραμετρικές εξισώσεις

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y = y_0 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ z = z_0 + \lambda a_3 + \mu b_3 \end{cases}$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

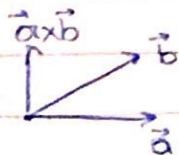
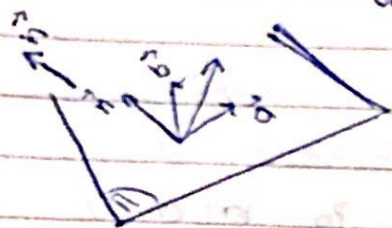
$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

Αναλυτική εξίσωση

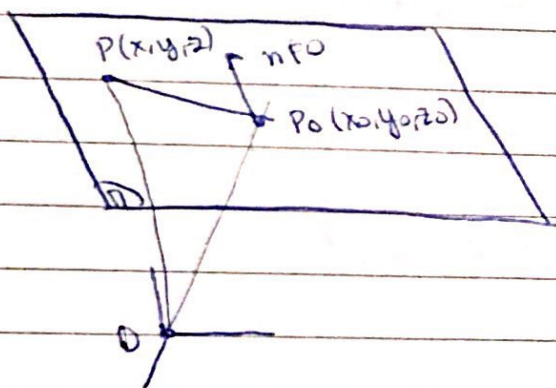
$x - x_0$	$y - y_0$	$z - z_0$	$= 0 \iff Ax + By + Cz + D = 0$ $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$
a_1	a_2	a_3	
b_1	b_2	b_3	

Ορισμός

Δίνεται επίπεδο (π) το οποίο διέρχεται από το σημείο P_0 και είναι $\parallel$ γραμμές $\vec{a}, \vec{b}$. Ένα διάνυσμα $\vec{n}$ καλείται καθετό στο (π) αν $\vec{n}$ ο φέρει ενός αντιστρόφως του είναι ευθεία $\perp (\pi) \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{a}$ και $\vec{n} \perp \vec{b}$
 $\vec{n} \perp \vec{a}$ και $\vec{n} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{n} \parallel \vec{a} \times \vec{b}$



Ένα επίπεδο καθορίζεται από ένα σημείο και ένα καθετό διάνυσμα του $\vec{n} \neq \vec{0}$



$$P \in (\pi) \Leftrightarrow \vec{P_0P} \perp \vec{n}$$

$$\vec{n} = (A, B, \Gamma) \neq (0, 0, 0)$$

$$\vec{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$P \in (\pi) \Leftrightarrow \langle \vec{P_0P}, \vec{n} \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + \Gamma(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$$

$$\text{όπου } \Delta = -Ax_0 - By_0 - \Gamma z_0$$

Παράδειγμα:

Δίνεται το επίπεδο $(\pi): 2x - 3y + z = 0$ ένα διάνυσμα καθετό στο (π) είναι το $\vec{n} = (2, -3, 1)$. Κάθε καθετό διάνυσμα στο (π) είναι $\lambda \vec{n}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Μέληση σχετικών θέσεων επιπέδων

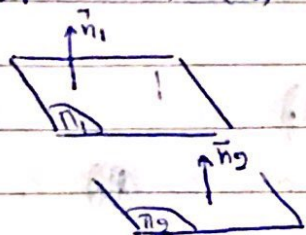
Δίνονται τα επίπεδα

$$(\pi_1) Ax + By + \Gamma z + \Delta_1 = 0, (A_1, B_1, \Gamma_1) \neq (0, 0, 0)$$

$$(\pi_2) A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2 = 0, (A_2, B_2, \Gamma_2) \neq (0, 0, 0)$$

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, \Gamma_1) \perp (\pi_1), \vec{n}_2 = (A_2, B_2, \Gamma_2) \perp (\pi_2)$$

$$A_1 \quad (\pi_1) \parallel (\pi_2) \quad \text{ή} \quad (\pi_1) \equiv (\pi_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1, \vec{n}_2 \text{ γρ. αε} \vec{j} \\ \Leftrightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0}$$



$$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \Leftrightarrow A_1 = \lambda A_2, B_1 = \lambda B_2, \Gamma_1 = \lambda \Gamma_2, \lambda \in \mathbb{R}^*$$

$$(\pi_1) \quad \lambda (A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z) + \Delta_1 = 0 \xrightarrow{: \lambda} A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \frac{\Delta_1}{\lambda} = 0$$

$$(\pi_2) \quad A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0$$

$$(\pi_1) \equiv (\pi_2) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$$

$$(\pi_1) \parallel (\pi_2) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \neq \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$$

ΠΑ

$$(\pi_1) \quad x - y + 2z + 1 = 0, \quad \vec{n}_1 = (1, -1, 2)$$

$$(\pi_2) \quad 3x - 3y + 6z + 2 = 0, \quad \vec{n}_2 = (3, -3, 6) = 3(1, -1, 2) = 3\vec{n}_1$$

$$\frac{1}{3} = \frac{-1}{-3} = \frac{2}{6} \neq \frac{1}{2} \Rightarrow (\pi_1) \parallel (\pi_2)$$

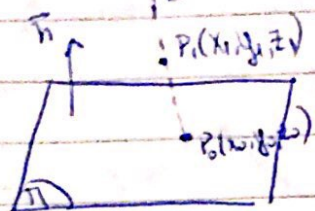
• $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ είναι γρ. αε $\vec{j} \Leftrightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{0}$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \neq (0, 0, 0)$$

Εστω $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, τα επίπεδα τέμνονται σε ευθεία.

Δίνεται επίπεδο $(\pi) : Ax + By + Cz + D = 0$

$(\pi) \perp \vec{n} = (A, B, C) \neq (0, 0, 0)$



Δίνεται σημείο $P_1(x_1, y_1, z_1) \notin (\pi)$

Σχερώ ευθεία (ϵ) που διέρχεται από το P_1 και

$(\epsilon) \perp (\pi)$ και τέμνει το επίπεδο (π) στο $P_0(x_0, y_0, z_0)$

$\rightarrow \vec{P_0P_1} \parallel \vec{n}$, δηλαδή $\vec{P_0P_1} = \lambda \vec{n}, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \text{[crossed out]} \quad [x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0] = \lambda (A, B, C)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_0 + \lambda A \\ y_1 = y_0 + \lambda B \\ z_1 = z_0 + \lambda C \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &= A(x_0 + \lambda A) + B(y_0 + \lambda B) + C(z_0 + \lambda C) + D = \\ &= \cancel{Ax_0 + By_0 + Cz_0} + D + \lambda(A^2 + B^2 + C^2) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = \lambda (A^2 + B^2 + C^2)$$

Προταση

Το σημείο $P_1 \notin (\pi)$ ανήκει στον ημισφαίριο που "δείχνει" το

$$\vec{n} = (A, B, C) \Leftrightarrow Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D > 0$$

Αποσταση σημείου από επίπεδο

Η αποσταση του $P_1(x_1, y_1, z_1)$ από το (π) είναι ο αριθμός

$$d(P_1, (\pi)) = d(P_1, P_0) = \|\vec{P_0P_1}\| = \|\lambda \vec{n}\| = |\lambda| \|\vec{n}\| =$$

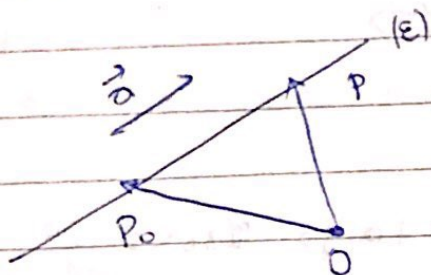
$$= \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Προταση

Η αποσταση $P_1(x_1, y_1, z_1)$ από το $(\pi) : Ax + By + Cz + D = 0$ είναι ο αριθμός $d(P_1, (\pi)) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Ευθείες στον χώρο

Μια ευθεία (ε) καθορίζεται από ένα σημείο της $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και ένα διάνυσμα $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \neq \vec{0} \parallel (ε)$



$$P \in (ε) \Rightarrow \vec{OP} = \vec{OP}_0 + \vec{P_0P}$$

$\vec{P_0P}$ συγγραμμένο με $\vec{a}$

$$\Rightarrow \vec{P_0P} = t\vec{a}$$

• $P \in (ε) \Leftrightarrow \vec{OP} = \vec{OP}_0 + t\vec{a}, t \in \mathbb{R}$ Στοιχειώδης εξίσωση

• $\vec{OP} = (x_0, y_0, z_0), \vec{OP} = (x, y, z)$

Η στοιχειώδης εξίσωση $\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$ Παραμετρικές
εξισώσεις
 $t = \text{παραμέτρος}$

Παραμετρικές εξισώσεις

$$\Rightarrow t = \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$$

(ε) $\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$ συμμετρικές
εξισώσεις

Στον παραπροσχησμό
εμφανίζονται συνεπείς
εξισώσεις παραλλήλες
στο σημείο

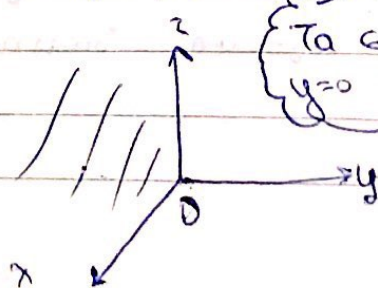
Παράδειγμα

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3}$$

παριστάνει ευθεία (ε) η οποία διέρχεται από

το $P_0(1, 0, -1)$ και ~~είναι~~ είναι παράλληλη προς το

$$\vec{a} = (2, 0, 3)$$



Τα σημεία με
 $y=0$ βρίσκονται

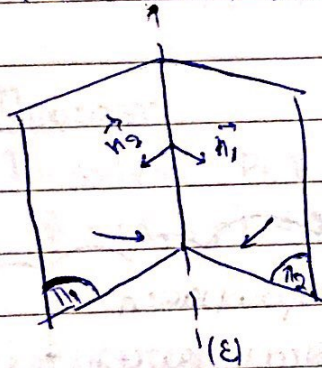
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 \\ z = -1 + 3t \end{cases}$$

Ουκότερες Εξισώσεις $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} \\ \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{z-z_0}{a_3} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a_2x - a_2x_0 = a_1y - a_1y_0 \\ a_3x - a_3x_0 = a_1z - a_1z_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2x - a_1y + 0z + a_1y_0 - a_2x_0 = 0 \\ a_3x + 0y - a_1z - a_3x_0 + a_1z_0 = 0 \end{cases}$$

Αποδείξατε ότι ένα ευείο αποτελείται από δύο εξισώσεις αμεσών της μορφής που καθορίζουν αναλυτικές εξισώσεις.

$$(E) = (\pi_1) \cap (\pi_2)$$



$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \perp (\pi_1)$$

$$\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) \perp (\pi_2)$$

$$(E) \parallel \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{0}$$

Ενα επίπεδο χαρακτηρίζεται από απείρες αναλυτικές εξισώσεις αρκεί οι συντελεστές να είναι αναλόγιοι

Το σύνολο των επιπέδων που περιέχουν ένα ευείο

$$(E) : \begin{cases} (\pi_1) A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \vec{o} \neq \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \perp (\pi_1) \\ (\pi_2) A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad \vec{o} \neq \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) \perp (\pi_2) \end{cases} \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{0}$$

καλείται άξονική δέσμη επιπέδων με άξονα την ευεία (E)

Ερώτηση: Ποια είναι η εξίσωση της αλφεικής δεξής;

$$\lambda(A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1) + \mu(A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2) = 0$$

$(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$

$$\Leftrightarrow (\lambda A_1 + \mu A_2)x + (\lambda B_1 + \mu B_2)y + (\lambda \Gamma_1 + \mu \Gamma_2)z + \lambda \Delta_1 + \mu \Delta_2 = 0$$
$$\frac{A_1}{A_2} = -\frac{\mu}{\lambda}$$

Παριστάνει το επίπεδο το οποίο περιέχει την ℓ_1 .

Αντιστροφή: Έστω επίπεδο (Π) της αλφεικής δεξής που διέρχεται από το $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \ell_1$

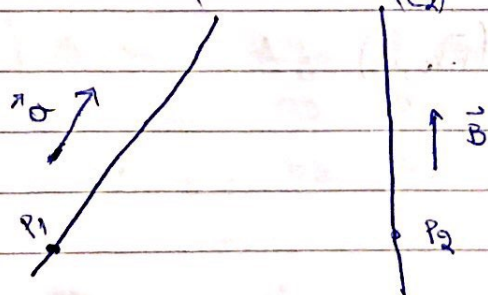
$$\lambda(A_2x_0 + B_2y_0 + \Gamma_2z_0 + \Delta_2) - (A_1x + B_1y + \Gamma_1z + \Delta_1) = 0$$

$$- (A_1x_0 + B_1y_0 + \Gamma_1z_0 + \Delta_1) (A_2x + B_2y + \Gamma_2z + \Delta_2) = 0$$

Σχετικές θέσεις δύο ευθειών

Δίνονται οι ευθείες $(\ell_1), (\ell_2)$ οι οποίες διέρχονται από τα σημεία $P_1(x_1, y_1, z_1)$ και $P_2(x_2, y_2, z_2)$ και είναι $\parallel$ προς τα $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \neq \vec{0}$,

$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ αντίστοιχα



$$(\ell_1) \parallel (\ell_2) \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \text{ και } P_1 \notin (\ell_2)$$

- $(\epsilon_1), (\epsilon_2)$ συνεπίπδες $\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{P_1P_2}$ είναι συνεπίπδα $\Leftrightarrow \vec{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}$ γρ. $\Leftrightarrow [\vec{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}] = 0$

Συμπεράσματα:

- $(\epsilon_1), (\epsilon_2)$ συνεπίπδες αν-ν $[\vec{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}] = 0$

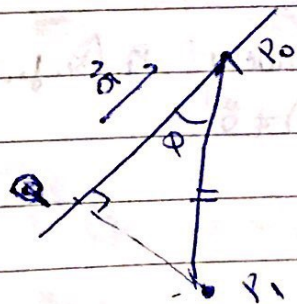
- $(\epsilon_1), (\epsilon_2)$ αδύνατες αν-ν $[\vec{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}] \neq 0$

- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow (\epsilon_1) \equiv (\epsilon_2) \wedge (\epsilon_1) \parallel (\epsilon_2)$

- $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \text{αδύνατες} & , \text{αν } [\vec{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}] = 0 \\ \text{συνεπίπδες} & , \text{αν } [\vec{P_1P_2}, \vec{a}, \vec{b}] \neq 0 \end{cases}$

Υπολογισμός απόστασης σημείων $P_1(x_1, y_1, z_1)$ από ευθεία ϵ

η οποία διέρχεται από σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και είναι $\parallel \vec{a} \neq \vec{0}$
 Φέρω ευθεία $P_1Q \perp (\epsilon)$ στο σημείο Q



$\parallel$ απόσταση του P_0 από την ϵ είναι ο αριθμός $d(P_1, \epsilon) = d(P_1, Q) = \|\vec{P_1Q}\| = \|\vec{P_0P_1}\| \sin \phi$

$$\sin \phi = \sin \angle(\vec{P_0P_1}, \vec{a})$$

$$\|\vec{P_1P_0} \times \vec{a}\| = \|\vec{P_1P_0}\| \|\vec{a}\| \sin \angle(\vec{P_1P_0}, \vec{a})$$

Συμπεράσματα

$$d(P_1, \epsilon) = \frac{\|\vec{P_1P_0} \times \vec{a}\|}{\|\vec{a}\|}$$